Un approccio alla teoria dei grafi

Keywords

Eulero e il problema dei ponti di Koenisberg, teoria dei grafi, vertici e grado dei vertici

Keywords - native language

Euler and Koenisberg bridge problem, graph theory, nodes and nodes degree

Author
Giuseppina Serafica
Last modified by
Giuseppina Serafica

Language
Italian

Peer Reviewers
Maria La Gioia
Nunzia Davino

Created on
2018-11-01
Last modified on
2018-11-03
Submission date
2018-11-01

Status

Rated

Attachments

117_immagini paper.docx

Reviewer 1

Reviewer 2

Title (in English)

An approach to graph theory

Abstract

L’attività proposta si riferisce allo sviluppo di un’unità didattica sui fondamenti di teoria dei grafi, da svolgersi in una classe prima per iniziare la matematica divertendo ed interessando gli alunni e sfatando l’idea che la materia è una rigida concatenazione di regole da ricordare a memoria ed applicare. Potrebbe essere usata anche nei primi giorni di scuola come attività di accoglienza. L’attività sarà costituita da due lezioni da due ore ciascuna. In una prima fase gli alunni parteciperanno e discuteranno collegialmente con l’insegnante proponendo soluzioni, successivamente cercheranno di risolvere individualmente con il metodo dei grafi semplici problemi proposti dall’insegnante.

Abstract (in English)

The proposed activity refers to the development of a teaching unit on the fundamentals of graph theory, to be carried out in a first class to start mathematics having fun and interesting students, thus debunking the idea that this subject is a rigid chain of rules to be remembered by heart and applied . It could also be used in the first days of school as a reception activity. The activity will consist of two lessons of two hours each. In a first phase the pupils will participate and discuss with the teacher collegially, proposing solutions, then they will try to solve individually simple problems proposed by the teacher with the method of graphs.

Introduction

Per noi insegnanti la matematica è un gioco o addirittura come dice Trudeau “la matematica è il più bel gioco del mondo. Assorbe più degli scacchi, scommette più del poker e dura più del Monopoli”. Queste affermazioni suscitano in molte persone delle perplessità, infatti sono molte le persone che amano la Matematica, ma altrettante quelle che la odiano. Una delle mie precise convinzioni è che la matematica non deve essere soltanto una serie di regole di calcolo da imparare a memoria o un linguaggio per pochi. Questo che fa sì che molti dicano:” di matematica non ho mai capito nulla” e che dopo poco aver finito la scuola non ricordino anche semplici regole di calcolo come quelle della somma di frazioni. Questa impostazione ha portato la Scuola Italiana ad un preoccupante analfabetismo matematico. Quindi, con questo quadro, risulta particolarmente importante, far capire agli alunni di un Liceo Scientifico, che così non è,

e non deve essere. A tal fine in questa attività sarà praticamente bandita la lezione frontale a vantaggio del problem solving e del cooperative learning.
La strategia didattica sarà pertanto la seguente:

1. Proporre il problema classico di teoria dei grafi dei ponti di Koenisberg
2. Far visualizzare la situazione attraverso un disegno
3. Spingere a schematizzare il disegno con un grafo e farne comprendere il vantaggio
4. Proporre altri interessanti problemi da risolvere singolarmente o in gruppo

Alla fine di questa attività il principale risultato atteso è che gli alunni abbiano un diverso entusiasmo verso la materia e una diversa percezione di essa, che sappiano capire quanta creatività è necessaria per essere un buon matematico e come questa disciplina aiuti a risolvere problemi molto disparati.

Content

MATERIA: Matematica
AROGOMENTO: Primi elementi di teoria dei grafi
FINALITA'

1. Raggiungimento di un atteggiamento positivo nei confronti della matematica, comprensione del fatto che gli strumenti matematici siano utili nella risoluzione di molti problemi;
2. Rispetto nei confronti di punti di vista diversi dal proprio; capacità di sostenere le p roprie convinzioni, portando esempi econtroesempi adeguati **e** argomentando attrav erso concatenazioni di affermazioni;
3. Capacità di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argome ntazione corretta.
4. Valutazione delle informazioni che si hanno su una situazione e sviluppo di senso c ritico.

LEZIONE 1

Il primo problema di teoria dei grafi è stato il problema dei ponti di Koenisberg. Koenisberg, città della Prussia Orientale, chiamata ora Kaliningrad ed exclave della Russia, famosa per aver dato i natali al filosofo Immnuel Kant ed al matematico David Hilbert, è attraversata dal fiume Preghel, che in città si biforca in due rami dividendo la città in quattro quartieri A,B,C,D, congiunti da 7 ponti come nella figura 1. (vedi allegato figura 1 *Mappa di Königsberg ai tempi di Eulero,immagine tratta da Wikipedia – L'enciclopedia libera)*

Una leggenda dice che, intorno al 1750, fra gli abitanti della città era sorto il problema se fosse possibile effettuare una passeggiata che partendo da uno qualsiasi dei quattro quartieri vi facesse ritorno, passando una ed una sola volta per ciascun ponte. Si narra anche, che spesso la sera qualcuno dopo aver fatto un'abbondante bevuta al pub, si ritirasse convinto di aver risolto il problema, ma che poi la mattina successiva non fosse in grado di ripetere il percorso.
Far esaminare agli alunni la figura 1 ed invitarli a cercare un percorso che risolva il problema. Dopo aver atteso qualche risposta, ed aver evidenziato il fatto che la risoluzione non è corretta (il problema è notoriamente impossibile), cercare di far capire come una schematizzazione del disegno permetta di porre maggiormente l'attenzione sul problema stesso, privandolo di informazioni che non sono utili e passare quindi ad un grafico simile a quello di figura 2 (vedi allegato figura 2 ,*immagine tratta da Wikipedia – L'enciclopedia libera*). Spingere ad un ulteriore schematizzazione, dicendo

che forse è meglio indicare i quartieri con dei punti e i ponti con degli archi facendoli arrivare al grafico di figura 3(vedi allegato figura 3 *,immagine tratta da Wikipedia – L'enciclopedia libera*) . Far capire quindi come un percorso può essere schematizzato con la successione di lettere che indicano i quartieri che attraversa. Far riflettere su come sarà la parola che indica un percorso che parte da un quartiere e vi ritorna e far osservare quale deve essere il numero di volte che una lettera deve ripetersi perché si attraversino tutti i ponti che da essa partono. Far riflettere su come sarà la parola che indica un percorso che parte da un quartiere e vi ritorna e far osservare quale deve essere il numero di volte che una lettera deve ripetersi perché si attraversino tutti i ponti che da essa partono.

A questo punto potrà essere enunciato il teorema di irrisolubilità del problema dei ponti di Koenisberg in maniera abbastanza informale. Si può quindi passare ad una definizione formale di grafo, di vertice di un grafo e di grado di un vertice e alla generalizzazione del teorema per un grafo qualsiasi. Cose che saranno necessarie per lo svolgimento degli esercizi nella lezione successiva.

Definizione

Si dice grafo una figura piana costituita da n punti detti nodi collegati da un certo numero di segmenti o linee detti lati o archi.

Definizione

Un ciclo contenente tutti i lati di un grafo una ed una sola volta si dice euleriano. Un grafo che contiene un ciclo euleriano si dice euleriano.

Teorema

Un grafo G è euleriano se e solo se è connesso ed ogni vertice di G è pari.

Definizione

Un grafo G che ha un cammino che contiene tutti i lati una ed una sola volta e tutti i vertici di G, si dice traversabile ed il cammino si dice euleriano

Teorema

Un grafo G è traversabile se e solo se è connesso ed ha esattamente due vertici di grado dispari. Inoltre ogni cammino euleriano di G comincia da uno dei vertici dispari e finisce nell'altro. Una proprietà interessante dei grafi euleriani è traversabili è che dopo che i vertici sono disegnati, si possono disegnare i lati con un tratto unico di penna

LEZIONE 2

Il problema dei ponti di Koenisberg concerne vertici non identificati, cioè caratterizzati solo dai loro collegamenti. Vi sono delle variazioni su di esso che propongono problemi un po' più complessi identificando i vertici del grafo con personaggi e ruoli. A questo punto possiamo proporre queste variazioni del problema iniziale ed invitare gli alunni a risolverle, anche consultandosi tra loro.

Sulla riva settentrionale sorge il castello del principe Blu, sulla riva meridionale sorge il castello del principe Rosso, sull'isola orientale c'è la sede del Vescovo, infine sull'isola centrale si trova un'osteria.(vedi allegato figura 4*,immagine tratta da Wikipedia – L'enciclopedia libera*)

L'ottavo ponte del principe Blu Il principe Blu , dopo aver analizzato il sistema dei ponti cittadini con l'aiuto della teoria dei grafi, si convince circa l'impossibilità di passare i ponti. Decide allora di costruire di nascosto un ottavo ponte che gli permetta la sera di passare i ponti partendo dal suo castello e finendo all'osteria dove potersi vantare della sua riuscita. Inoltre vuole fare in modo che il principe Rosso non riesca a fare altrettanto dal suo castello. Dove costruisce l'ottavo ponte del principe Blu***Il nono ponte del principe Rosso*** Il principe Rosso imbufalito per la mossa del fratello, capisce che può reagire solo dopo aver studiato la teoria dei grafi. Dopo un attento studio anche lui decide di costruire di nascosto un altro ponte che consenta a lui di attraversare tutti ponti partendo dal suo castello e finendo all'osteria dove prendere in giro il fratello a cui sarà impossibile passare i ponti al suo modo. Dove costruisce il nono ponte del principe Rosso?

Il decimo ponte del Vescovo Il vescovo ha dovuto assistere alla dispendiosa contesa cittadina con crescente irritazione. Essa ha portato alla formazione di due fazioni ed ha fatto crescere il numero di frequentatori dell'osteria, con danno alla quiete pubblica. Quindi anche lui, dopo un accurato studio della teoria dei grafi, decide di costruire un decimo ponte che consenta ai cittadini di passare tutti i ponti e fare ritorno alla propria casa. Dove costruisce il decimo ponte il vescovo?

Soluzione

I ragazzi hanno capito che i cammini di Eulero sono possibili se esattamente 2 nodi sono di grado dispari, che sono i nodi iniziale e finale del cammino. Poiché il problema presenta 4 nodi tutti di grado dispari, ed il cammino deve cominciare dal nodo A e finire nel nodo C, bisogna disegnare un nuovo lato tra gli altri due nodi. Quindi il principe Blu deve costruire un ponte tra l'isola orientale e la sponda meridionale.

Gli altri casi saranno risolti analogamente.

Un altro problema, che può essere definito 'storico', e che può avvalersi della teoria dei grafi per un'analisi dello schema di soluzione è un enigma noto a tutti i bambini fin dai primi anni di scuola, e cioè il problema noto con il nome di salvare capra e cavolo, che è modo di dire popolare ma che trae origine da un rompicapo vecchio di secoli e la cui soluzione si deve a Tartaglia13 (libro 16, N. 141) . Proporremo anche questo come esercizio.

L'enunciato del problema è il seguente:

Sulla riva di un fiume si trovano una pecora, un lupo ed un cavolo, un barcaiolo deve portarli sull'altra sponda con una barca così piccola che può portare soltanto uno tra pecora, lupo e cavolo oltre al barcaiolo stesso. Inoltre il barcaiolo non può lasciare senza sorveglianza il lupo in compagnia della pecora o la pecora in compagnia del cavolo. Come può il barcaiolo realizzare questo trasferimento

Soluzione Inizialmente sulla riva destra si trovano lupo, pecora, cavolo e barcaioli e sull'altra riva non c'è nessuno. Lo stato iniziale sulle due rive sarà simboleggiato dai due insiemi (L,P,C,B) e Ø. Tutti gli stati possibili sono indicati nella tabella seguente.

	Riva destra	Riva sinistra
1	L,P,C,B	Ø
2	L,C,B	P
3	P,C,B	L
4	P,L,B	C
	P,L,C	B
	C,B	P,L
	L,B	P,C

5	L,C	P,B
6	P,B	L,C
	P,C	B,L
	L,P	C,B
	B	P,L,C
7	P	B,L,C
8	L	P,C,B
9	C	L,P,B
10	Ø	L,C,P,B

Ovviamente non tutti i casi in tabella sono possibili. I casi non numerati sono quindi da scartare, restano perciò i casi numerati a sinistra. Possiamo allora costruire un grafo avente per vertici i dieci possibili stati della riva destra e congiungere con i lati quei vertici che rappresentano stati che possano trasformarsi l'uno nell'altro mediante un solo viaggio completo della barca. I lati potranno congiungere le seguenti coppie di vertici (1,5); (2,5); (2,8); (2,9); (3,9); (3,7); (4,7); (4,8); (6,7); (6,10) in un senso e nell'altro.

La soluzione del problema è un cammino che parta dal vertice 1 e finisca al vertice 10. I ragazzi potranno quindi costruire due cammini, che sono entrambi soluzione del problema.(in allegato figura 5)**.**

Un altro problema proponibile è quello del salto del cavallo:

Data una scacchiera 3x3 e numerate le caselle come in figura, e posti i cavalli degli scacchi nelle caselle 1 e 3 (i bianchi) e nelle caselle 7 e 5 (i neri), ci si domanda se è possibile cambiare di posto ai cavalli (i bianchi in 7 e 5 ed i neri in 1 e 3) spostando un cavallo alla volta secondo la modalità degli scacchi senza mai avere due cavalli nella medesima casella.

Far capire agli alunni che appresentare le regole e lo schema di risoluzione del problema ora enunciato con l’ausilio di un grafo significa, così come è rappresentato in figura , associare ad ogni casella un nodo e definire che due nodi sono collegati da un arco solo se é possibile passare da uno all’altro, degli scacchi che rappresentano, con una mossa di cavallo.

Si osserva allora che la casella centrale, non numerata, non é raggiungibile, mentre il problema ha soluzione poiché basta far circolare i cavalli secondo lo schema del grafo

(figura 6 in allegato da docente.unife.it/.../Note%20di%20**teoria**%20**dei**%20**grafi**.pdf), in modo da non sovrapporli in nessuna delle configurazioni possibili.

Conclusions

Questa attività si propone di mettere insieme gioco e una branca relativamente nuova della matematica, che è la teoria dei grafi, la quale è una sezione importante della Ricerca Operativa. La ricerca operativa, nella nostra vita quotidiana assume un grande rilievo, visto che permette di risolvere problemi di ottimizzazione che oggi sono di fondamentale importanza. In questo senso si riallaccia anche al tema della matematica e realtà, infatti tutti i problemi trattati sono problemi collegabili con situazioni reali o realistiche. Approcciare gli alunni, quindi in modo anche informale, con questa parte della materia, è una cosa senz'altro utile. Inoltre permette di utilizzare una metodologia che si può trasferire anche alla risoluzione di altri problemi, e cioè la modellizzazione.

L'attività è stata subito accolta dagli alunni con molto entusiasmo, ma forse un po' troppo come un gioco. Col proseguire del lavoro però i tagazzi si sono resi conto dell'importanza della teoria dei grafi e della modellizzazione. Infatti nel corso dell'anno e degli anni successivi è stata ripresa per risolvere svariati problemi intorducendo una sempre maggiore formalizzazione. Sono quindi stati introdotti i grafi ordinati e gli alberi. I primi sono sati molto utili nello studio di relazioni e funzioni e i secondi nella risoluzioni di problemi di calcolo della probabilità. Infinre nell'ultimo anno, è stata dimostrata la relazione di Eulero tra i vertici, gli spigoli e le facce di un solido, facendo uso sempre della teoria dei grafi.

Pertanto dire che si può sintetizzare il percorso fatto partendo da questa attività, come un percorso che è andato dal gioco alla matematizzazione. Per questo mi piace concludere questo paper cona frase di Italo Calvino:

Molte volte l'impegno che gli uomini mettono in attività che sembrano assolutamente gratuite, senz'altro fine che il divertimento o la soddisfazione di risolvere un problema difficile, si rivela essenziale in un ambito che nessuno aveva previsto, con conseguenze che portano lontano. Questo è vero per la tecnologia . Il gioco è sempre stato il grande motore della cultura.

References

—Bibliografia—

Oystein Ore "*I grafi e le loro applicazioni*" casa ed. Zanichelli 1965

Mauro Dell'Amico "*Programmazione matematica*" casa ed. Pitagora 1999

—Gary Chartrand "*Introductory graph theory*" casa ed. Dover Publications 2012

Claude Berge "*The theory of graphs*" casa ed. Dover Pubblications 2003

Sitografia

—<*http://www.mat.uniroma3.it/users/liverani/doc/disp_oc_04.pdf > [Accessed 1/11/2018]*

—<*http://www.liceodavincitv.it/attivi/lauree/08-09/appunti**grafi**.pdf* > *[Accessed 2/11/2018]*

<http:www.matematicamente.it/.../98.Zammillo-Salto_del_cavallo.pdf> [Accessed 2/11/2018]—

—<http:www.docente.unife.it/.../Note%20di%20**teoria**%20**dei**%20**grafi**.pdf> [Accessed 1/11/2018]